Prędkość i przyspieszenie we współrzędnych stycznej i normalnej $(\hat{t}, \hat{n})$ do toru oraz we współrzędnych biegunowych $(\hat{r}, \hat{\varphi})$

Sprowadzamy nasze rozumowanie do przypadku dwuwymiarowego, tzn. tak orientujemy płaszczyznę rozpiętą przez dwa wersory bazy, że zawiera ona interesujący nas lokalny wycinek toru ruchu. Odpowiemy na pytanie, jakie składowe w obu wypadkach ma prędkość i przyspieszenie – tj. pierwsza i druga pochodna czasowa wektora wodzącego $\vec{r}$, który wskazuje nam chwilowe położenie ciała? Dojdziemy w ten sposób przy okazji do wniosków, które podaje się bez wyprowadzenia i do nauczenia (ale nie do zrozumienia) w szkole.

I. Współrzędne: styczna i normalna do toru

W danym punkcie toru, wersor (jednostkowej długości wektor kierunkowy) styczny $\hat{t}$ pokazuje nam kierunek stycznej, wzdłuż elementarnego przemieszczenia *ds*. Jest to również, jak się spodziewamy otrzymać z równań, kierunek prędkości chwilowej $\vec{v}$. Prostopadły do niego wersor normalny $\hat{n}$ wskazuje umowny kierunek „na zewnątrz”.

Różniczkując wektor położenia po czasie (co definiuje prędkość), zastosujmy parametryzację po drodze *s*. Droga (przemieszczenie) *s* jest jednoznaczną i monotonicznie rosnącą funkcją parametru *t*, a zatem niech zajmie jego miejsce jako nowy parametr. Potraktujemy drogę jako zmienną niezależną, po której można np. zróżniczkować wielkości kinematyczne. A zatem:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{t} \cdot v_t = v_t\hat{t} \quad .$$

Wielkość $v_t \equiv \frac{ds}{dt}$ to zwykła prędkość liniowa. Pochodna wektora wodzącego $\vec{r}$ po drodze *s* stanowi zaś niewątpliwie wektor styczny do toru w miejscu *ds*, z kierunkiem zgodnym z przyrostem drogi *s*, i jest on jednostkowej długości, bo infinitezymalna różnica wektorów wodzących $d\vec{r}$ w dwóch kolejnych momentach czasu pokrywa się z *ds*, a zatem co do normy ma tę samą wartość, co długość *ds*. Wektor jednostkowy i styczny, to po prostu wersor $\hat{t}$.

Zgodnie z naszymi intuicjami uzyskaliśmy wynik, że prędkość liniowa w dowolnym momencie ruchu jest koniecznie styczna do jego toru. Nic dziwnego, skoro tor pokazuje, gdzie po chwili znajdzie się ciało zgodnie z jego prędkością.

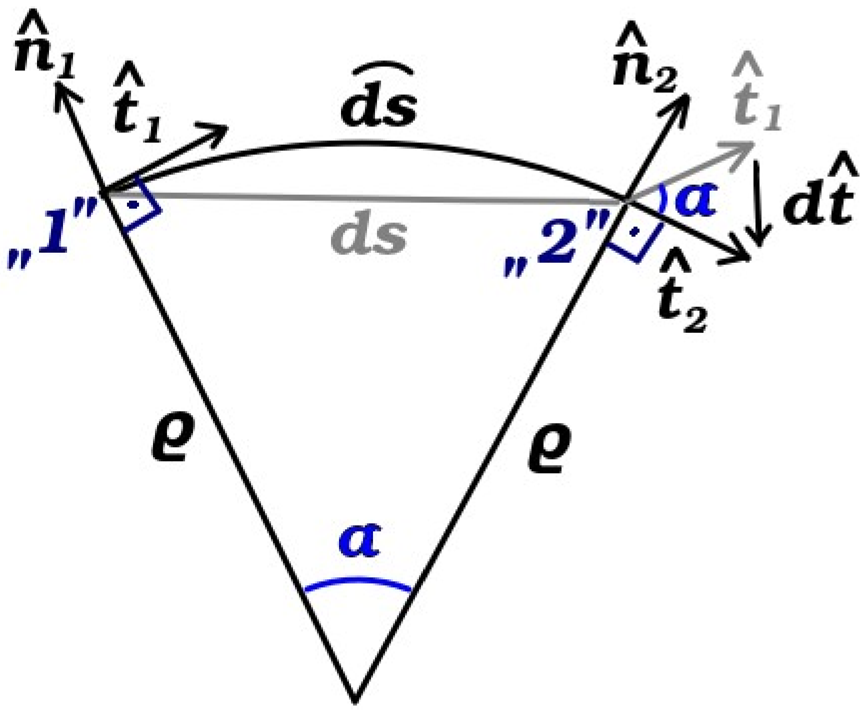
Przyspieszenie jest drugą pochodną wektora położenia po czasie, a zatem pochodną po czasie otrzymanego powyżej wyrażenia. Zarówno składowa prędkości stycznej, jak i wersor styczny zmieniają się w czasie (wraz z ruchem ciała po jego torze), więc się różniczkują:

$$\vec{a} \;=\; \frac{d}{dt}(v_t \hat{t}) \;=\; a_t \hat{t} \;+\; v_t \frac{d\hat{t}}{dt} \quad .$$

Tę ostatnią pochodną również sparametryzujmy po drodze *s*, co pozwoli nam wypisać ją explicité:

$$\frac{d\hat{t}}{dt} \;=\; \frac{d\hat{t}}{ds}\;\frac{ds}{dt} \;=\; v_t \frac{d\hat{t}}{ds} \quad ,$$

modulo ostatni wyraz, którego postać wyniknie nam z prostej geometrii (poglądowy rysunek ma przesadzone proporcje dla czytelności). Mianowicie,



Podczas ruchu ciała z punktu „1” do położonego o *ds* (tj. o infinitezymalnie małe przemieszczenie) dalej na torze punktu „2”, krzywizna toru ma w lokalnie promień ϱ, a pomiędzy promieniami wodzącymi początku i końca tej drogi panuje bardzo mały kąt α. Zauważamy, że ten sam kąt odtwarza się pomiędzy wersorami $\hat{t}_1$ i $\hat{t}_2$, ponieważ odpowiednie odcinki są do siebie prostopadłe. Na tym infinitezymalnym przemieszczeniu, wersor styczny zmienia się o $d\hat{t}$. Im bardziej zbiegamy w granicy z punktem „2” do punktu „1”, kierunek $d\hat{t}$ staje się coraz bliższy normalnemu do toru (przy czym wersory $\hat{n}_1$ i $\hat{n}_2$ stają się coraz bliższe sobie i jednakowo skierowane), a jego zwrot przeciwny do $\hat{n}$. W tej samej granicy również długość łuku *ds* pokrywa się coraz dokładniej z długością cięciwy *ds*.

Rozważając dwa trójkąty: „duży”, o ramieniu ϱ i „mały”, zbudowany z różnicy wersorów „2” i „1”, otrzymujemy:

$$ds \simeq \overset{\frown}{ds} = \alpha \cdot \rho, \ \ sk\text{ą}d \ \ \alpha \simeq \frac{ds}{\rho}$$ (przybliżona równość staje się równością ścisłą w granicy)

oraz

$$d\hat{t} \simeq \overset{\frown}{d\hat{t}} = \alpha \cdot \|\hat{t}\| \ (-\hat{n})$$ (wektor $d\hat{t}$ jest skierowany granicznie przeciwnie do $\hat{n}$).

A jako, że norma wersora $\hat{t}$ (nieważne, z którym indeksem) jest równa 1, to w granicy otrzymujemy $d\hat{t} = -\alpha\hat{n}$. Podstawiwszy kąt α z pierwszej równości do drugiej, dostajemy:

$$d\hat{t} = -\frac{ds}{\rho}\hat{n}, \ \ czyli \ \ \frac{d\hat{t}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\hat{n} \ .$$

Wracając z gotową formułą do równości sponad obrazka, otrzymujemy $\frac{d\hat{t}}{dt} = v_t \frac{d\hat{t}}{ds} = -\frac{v_t}{\rho}\hat{n}$ i ostatecznie, dla przyspieszenia:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_t \hat{t}) = a_t \hat{t} - \frac{{v_t}^2}{\rho}\hat{n} \ .$$

Drugą współrzędną przyspieszenia identyfikujemy natychmiast jako przyspieszenie normalne (a skoro tor na obrazku zagina się ku dołowi – ku środkowi lokalnej krzywizny – ma ono znak minus). Tym samym dokonaliśmy rozkładu przyspieszenia w (lokalnym, zmiennym co do orientacji wzdłuż toru) układzie współrzędnych $(\hat{t}, \hat{n})$. Współrzędne wynoszą, odpowiednio, $a_t \equiv \frac{d^2 s}{dt^2}$ (zwykłe przyspieszenie liniowe, styczne do toru) oraz $a_n \equiv -\frac{v^2}{\rho}$ (przyspieszenie normalne, proporcjonalne do kwadratu prędkości liniowej i odwrotnie proporcjonalne do promienia krzywizny). Znak minus pokazuje, że przyspieszenie normalne jest dośrodkowe. Byłoby ono dośrodkowe również, gdyby zamiast lokalnej „górki” jak na rysunku (tor wklęsły) był „dołek” (tor wypukły), ponieważ wówczas zarówno wektor $d\hat{t}$ miałby przeciwny zwrot, jak i środek krzywizny przeskoczyłby z dołu na górę (ponad tor) – ϱ stałoby się ujemne i znak przyspieszenia normalnego pozostałby zachowany. Tak czy inaczej, przyspieszenie skierowane byłoby ku środkowi krzywizny.

Jak widać, przyspieszenie styczne zmienia jedynie wartość wektora prędkości, a przyspieszenie normalne odpowiada wyłącznie za zmianę kierunku wektora prędkości (gdy ciało porusza się po prostej, tj. promień krzywizny jest nieskończony, wówczas a_n znika). W ten sposób, wektor prędkości liniowej zmienia się w całej ogólności – co do długości i/lub kierunku.

II. Współrzędne biegunowe

Układ współrzędnych $(\hat{r}, \hat{\varphi})$ w ogólności, poza jedynym przypadkiem ruchu po łuku okręgu, nie ma nic wspólnego z układem wyznaczonym przez styczną i normalną. Jako, że jedynym parametrem używanym przez nas będzie czas, skorzystamy z notacji Izaaka Newtona i pochodne wielkości po czasie będziemy oznaczać pojedynczą (pierwsza pochodna) lub dwiema kropkami (druga pochodna) nad literą zmiennej, np. $\frac{dr}{dt} \equiv \dot{r}$. W ten sposób utrzymamy klarowną, pojedynczą linię bez kresek ułamkowych w ostatecznych formułach.

Jako, że zarówno wersor $\hat{r}$ wskazujący wzdłuż wektora położenia $\vec{r}$ (czyli radialnie od środka układu współrzędnych), jak i prostopadły do niego wersor $\hat{\varphi}$ pokazujący kierunek wzrostu kąta φ (tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) zmieniają swą orientację od punktu do punktu, będą się różniczkować po czasie – w którym ciało porusza się po swoim torze, zmieniając położenie. Rozpisując $\hat{r}$ i $\hat{\varphi}$ w niezależnej od położenia bazie współrzędnych kartezjańskich $(\hat{x}, \hat{y})$ i wspominając na fakt, że długość wersorów (przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego) wynosi 1, mamy następujące ich składowe:

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Znak minus wynika z oczywistego faktu, że układ jest naturalny, prawoskrętny, tzn. $\hat{\varphi}$ „patrzy” w lewo od kierunku $\hat{r}$. Oczywiście, jest to układ prostokątny: $\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0$.

Skoro każdy wektor jest iloczynem swojej długości i zwrotu, tzn. $\vec{w} = w \cdot \hat{w}$, to rozpisując w ten sposób wektor położenia we wzorze na prędkość, otrzymujemy:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \text{ , a skoro}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\hat{\varphi} \text{ , to } \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi} .$$

Warto mieć świadomość, że $\dot{\varphi} \equiv \omega$, czyli prędkość kątowa. Składowe prędkości $\vec{v}$ we współrzędnych biegunowych to $\dot{r}\hat{r}$ – składowa radialna, odpowiadająca za zmianę wzdłuż kierunku położenia, oraz $r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ – składowa transwersalna, w kierunku zmiany orientacji wektora położenia. Jej postać jest doskonale znaną ze szkoły formułą na prędkość liniową w ruchu po okręgu $v_{\varphi} = \omega r$.

Przyspieszenie $\vec{a}$ jest pochodną po czasie wyżej otrzymanej formuły. Każdy składnik i czynnik jest zmienny w czasie, więc będzie się różniczkował. Na boku policzmy wpierw, że $\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos\varphi & \dot{\varphi} \\ -\sin\varphi & \dot{\varphi}\end{pmatrix} = \dot{\varphi}\ (-\hat{r})$. A zatem

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\varphi}\hat{\varphi}) = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{r}\,\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\,\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - r\,\dot{\varphi}^2\hat{r} =$$
$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi})\hat{\varphi} \ .$$

Składowa radialna składa się ze zwykłego przyspieszenia radialnego $\ddot{r}$ i przyspieszenia dośrodkowego $-\omega^2 r$, a transwersalna – z przyspieszenia związanego z interakcją zmiany długości i kierunku wektora położenia jednocześnie $2\,\omega\,v_r$ (tzn. skutkiem ruchu obrotowego na radialny wektor prędkości, którego początek i koniec przemieszczają się niejednakowo) oraz zwykłego przyspieszenia kątowego $\epsilon\,r$.

Jeśli założymy, że mamy do czynienia z ruchem jednostajnym, bez przyspieszeń: radialnego i kątowego, wyrazy z drugimi pochodnymi – owe „zwyczajne” przyspieszenia – znikają. Nadal jednak mamy do czynienia z układem wirującym, a więc nieinercjalnym – ustawicznie zmienia się wektor prędkości, co najmniej co do orientacji w przestrzeni.

Aby w układzie związanym z naszym ciałem, znajdującym się w ruchu posuwistym i obrotowym, odnotować zerową wypadkową siłę (aby wyzerowały się nam wszystkie wyrazy w wyrażeniu na przyspieszenie) i ciało to mogło w tym układzie spoczywać, trzeba dołożyć dwie siły pozorne (bezwładności): jedną, radialną – zapewniającą przyspieszenie odśrodkowe $\omega^2 r$, skierowane radialnie na zewnątrz toru, oraz drugą, transwersalną – siłę Coriolisa, nadającą przyspieszenie Corioliosa $-2\,\omega\,v_r$, działającą przeciwnie do kierunku wzrostu kąta φ.

Jak widać, siła Coriolisa jest odczuwana wówczas, gdy prędkość ciała ma niezerową składową radialną przy jednoczesnym ruchu obrotowym. Odczuwają ją np. rzeki płynące w kierunku północno-południowym na kuli ziemskiej, żłobiąc swoje brzegi (niezależnie od kierunku nurtu, bo liczy się składowa radialna prędkości, a każda rzeka spływa z góry na dół): na półkuli północnej mocniej rzeźbiąc wschodni (prawy) brzeg, a na południowej – zachodni (lewy). Cyklony zawijają się na półkuli północnej przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a na południowej – odwrotnie.

Sprawdź, w jakim kierunku wiruje woda wypuszczana z wanny na Twojej półkuli ziemskiej!

Autor: Marek Pietrachowicz